Simulazione a 3 D.o.F. per la dinamica longitudinale di un missile

Introduzione

Nel presente laboratorio verrà derivata la dinamica del volo di missile supponendo si possano disaccoppiare i piani longitudinale e latero direzionale e poi risolta numericamente avendo assunto opportune semplificazioni.

Dinamica

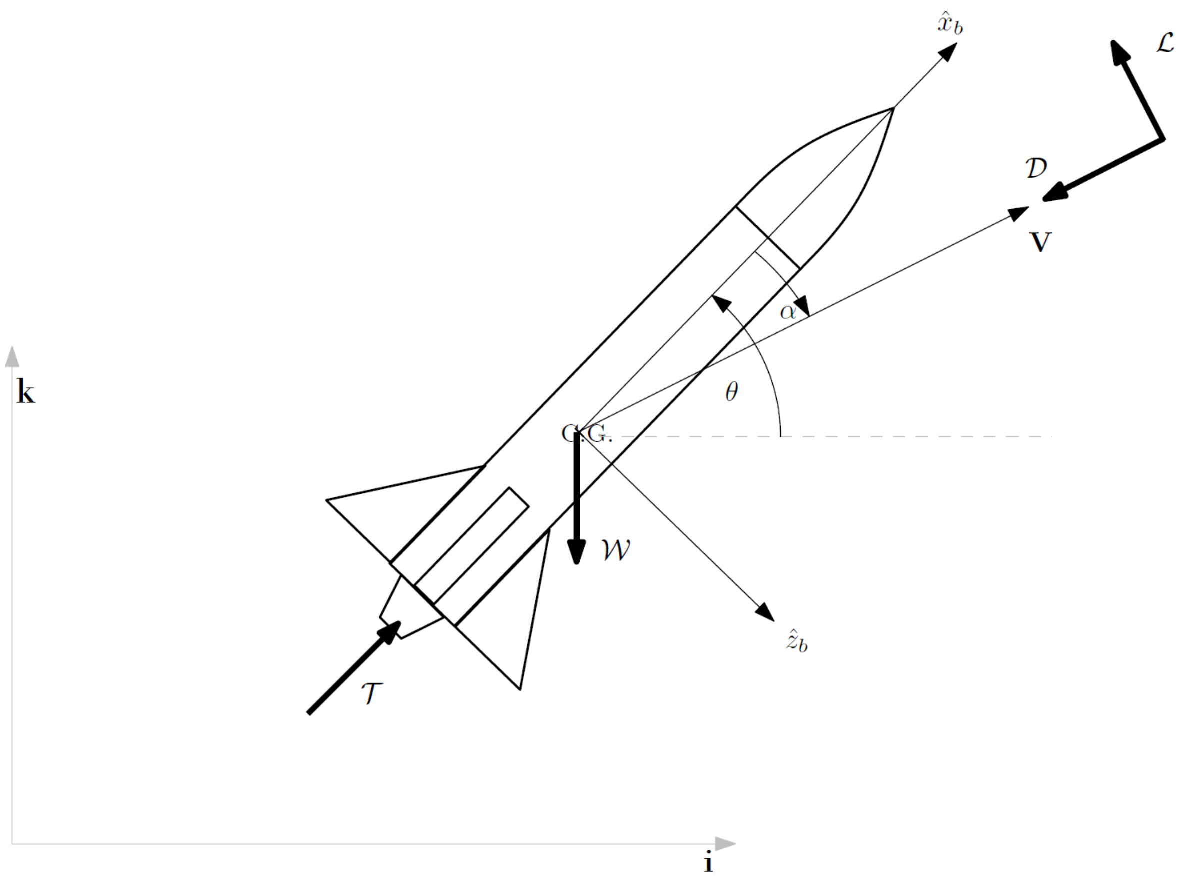

Figura 1: Rocket Model

Supponiamo di poter descrivere la dinamica longitudinale del nostro missile esclusivamente analizzandolo in piano[1]. Sia $\tilde{\mathbf{u}}$ il vettore velocità del missile le cui componenti rispetto agli assi corpo x_b, z_b siano u_b, w_b e quelle rispetto agli assi inerziali u, w.

Scrivendo le equazioni cardinali per il missile si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} & = \sum_i \mathbf{f_i} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{p} \times \mathbf{u}_{\mathrm{C.G.}} & = \sum_i \mathbf{m_i} \end{cases} \tag{1}$$

essendo $\mathbf{p}$ il vettore quantità di moto e $\mathbf{k}$ il vettore momento angolare $\mathbf{k} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$. In questo caso piano la velocità angolare è uscente dal foglio e ha componente q. Essendo $\mathbf{p}$ e $\mathbf{u}_{\mathrm{C.G}}$ paralleli il termine $\mathbf{p} \times \mathbf{u}_{\mathrm{C.G.}}$si annulla. Scrivendo le equazioni in forma estesa si ottiene:

$$\begin{cases} m\dot{u} & = f_x - \dot{m}u \\ m\dot{w} & = f_z - \dot{m}w \\ I_y\dot{q} & = m_y - \dot{I}_y q \end{cases} \tag{2}$$

Restano da definire ora le forzanti esterne. Abbiamo portanza e resistenza che agiscono lungo gli assi vento, vale a dire allineate con la velocità del missile[2]:

$$\mathcal{D} = 0.5\rho \left|\tilde{\mathbf{u}}\right|^2 SC_D \tag{3}$$

$$\mathcal{L} = 0.5\rho \left|\tilde{\mathbf{u}}\right|^2 SC_{L,\alpha}\alpha \tag{4}$$

la spinta che agisce lungo l'asse corpo $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{b}$, di essa è disponibile il profilo registrato in fase di testing statico.

Infine abbiamo il peso che agisce nel sistema di riferimento inerziale:

$$\mathcal{W} = -mg\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5}$$

Ora bisogna proiettare tutto sugli stessi assi, in primis portanza e resistenza vanno ruotati in assi corpo:

$$\begin{bmatrix} f_{x_b} \\ f_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix} \tag{6}$$

dove $\alpha = \theta - \arctan\left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{u}}\right)$ o anche $\alpha = \arctan\left(\frac{w_b}{u_b}\right)$. Lungo l'asse $\hat{\mathbf{x}}_b$ va aggiunta la spinta:

$$f_{x_b} = f_{x_b} + \mathcal{T}(t) \tag{7}$$

il tutto va ora ruotato sugli assi $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{k}}$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{x_b} \\ f_{z_b} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$f_z = f_z - mg \tag{9}$$

per ciò che concerne l'unica equazione di rotazione, il momento agente sul missile è il momento aerodinamico:

$$\mathbf{m}_y = 0.5\rho \left|\tilde{\mathbf{u}}\right|^2 SDC_{M,\alpha}\alpha \tag{10}$$

[1] Ciò non è vero in quanto derivando la dinamica completa a 6 D.o.F. si trova come le equazioni siano accoppiate tra di loro e necessitino quindi di essere risolte tutte contemporaneamente.

[2] La velocità per le forzanti aerodinamiche è $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{wind}}$

Il set di equazioni va inoltre scritto sotto forma di sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u \\ \dot{z} &= w \\ \dot{\theta} &= q \\ m\dot{u} &= f_x - \dot{m}u \\ m\dot{w} &= f_z - \dot{m}w \\ I_y\dot{q} &= m_y - \dot{I}_y q \\ \dot{m} &= -MFR \\ \dot{I}_y &= -\frac{I_y^{\text{Full}} - I_y^{\text{Empty}}}{t_b} \end{cases} \tag{11}$$

dove si è supposto di avere una portata di gas che fuoriescono dall'ugello costante pari a MFR.

Richieste

- Si risolva il problema della dinamica del missile in ascesa (quindi terminando simulazione all'apogeo) con i seguenti dati visualizzando opportunamente i risultati:

Nome	**Valore**	**Unità di Misura**
I_y^{Full}	3.98	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
I_y^{Empty}	3.33	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
C	90	mm
t_b	2.1	s
m_p	2	Kg
m_0	8	Kg
$C_{M,\alpha}$	-50	_
$C_{L,\alpha}$	3.2	_
C_D	0.8	_
$\mathcal{T}$	780	N

Tabella 1: Input Data